

Preprint

**Pertenencia institucional****Resumen****Palabras clave:****Correspondencia****Abstract****ORCID****Key words:**

Análisis teórico de la actividad de mezclas de isótopos radiactivos modelada mediante la transformada de Laplace y simulación en Python

Andrés Felipe Orduz Pérez^{**}

Resumen

La gestión de residuos nucleares requiere una comprensión exhaustiva de la evolución de su actividad a lo largo del tiempo, la cual está determinada por la composición isotópica y las características de decaimiento de los diversos radionucleidos presentes. En este estudio teórico, se aborda el análisis del comportamiento de la actividad total en mezclas de isótopos radiactivos mediante la aplicación conceptual de la transformada de Laplace y la simulación numérica en Python. Se establece el marco matemático del decaimiento radiactivo para isótopos individuales y se extiende al modelado de mezclas mediante el principio de superposición. La transformada de Laplace se introduce como una herramienta fundamental en el análisis de sistemas lineales, y su aplicación al decaimiento radiactivo revela la relación entre las constantes de decaimiento en el dominio del tiempo y la ubicación de los polos en el dominio de la frecuencia compleja (s). Mediante la simulación de escenarios teóricos en Python, se ilustra cómo las diferentes combinaciones de constantes de decaimiento y cantidades iniciales de los isótopos influyen en la curva de actividad total de la mezcla. El análisis de estas simulaciones, interpretado a través del lente de la teoría de sistemas lineales y la transformada de Laplace, proporciona *insights* fundamentales sobre la dinámica de la actividad en sistemas multi-componentes, sentando las bases para una comprensión teórica más profunda en el campo de la gestión de residuos nucleares.

Palabras Clave: Residuos Nucleares, Decaimiento Radioactivo, Transformada de Laplace, Simulación en Python, Análisis Teórico, Mezclas de Isótopos, Actividad Total.

^{*} Ingeniería Electrónica, Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad de los Llanos

^{**} ORCID:  0009-0001-1663-517X

Introducción

La gestión segura y el almacenamiento a largo plazo de residuos nucleares representan un desafío significativo para la sociedad moderna. Estos residuos se caracterizan por contener una compleja mezcla de diversos isótopos radiactivos, cada uno con propiedades de decaimiento únicas, definidas por sus respectivas vidas medias y modos de desintegración (Choppin et al., 2013). La predicción precisa de la actividad total de estos residuos a lo largo del tiempo es crucial para la evaluación de riesgos radiológicos, el diseño de contenedores de almacenamiento seguros y la planificación de estrategias de disposición final.

El comportamiento temporal de la actividad de una mezcla de isótopos radiactivos es el resultado de la superposición de las leyes de decaimiento exponencial individuales de cada componente. Los isótopos con vidas medias cortas contribuyen significativamente a la actividad inicial, pero su contribución disminuye rápidamente. Por otro lado, los isótopos con vidas medias largas persisten durante escalas de tiempo mucho mayores y, eventualmente, dominan la actividad residual. Comprender la dinámica de esta actividad total requiere un análisis detallado de la composición isotópica y las características de decaimiento de cada componente presente en la mezcla (Krane, 1987).

La transformada de Laplace, una herramienta matemática fundamental en el análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI) (Oppenheim et al., 1997), ofrece un marco poderoso para el estudio de sistemas dinámicos como el decaimiento radiactivo. Al transformar funciones del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia compleja (s), la transformada de Laplace facilita la resolución de ecuaciones diferenciales y proporciona *insights* sobre la respuesta del sistema a diferentes modos de comportamiento. En el contexto del decaimiento radiactivo, la transformada de Laplace puede utilizarse para analizar la actividad de isótopos individuales y, mediante la propiedad de linealidad, extender este análisis a mezclas complejas.

En esta investigación teórica, se explorará el comportamiento de la actividad de mezclas de isótopos radiactivos utilizando la transformada de Laplace como una herramienta conceptual clave. A través del diseño y la simulación de escenarios teóricos en Python, se ilustrarán los principios fundamentales del decaimiento y la superposición en el dominio del tiempo y se relacionarán con su representación en el dominio de Laplace. El objetivo principal es proporcionar una comprensión teórica profunda de cómo las características de los isótopos individuales (constantes de decaimiento, cantidades iniciales) influyen en la actividad total de la mezcla a lo largo del tiempo, analizando este comportamiento desde la perspectiva del análisis de sistemas lineales mediante la transformada de Laplace. Este enfoque teórico busca sentar las bases para futuras investigaciones más aplicadas y

para una mejor comprensión de los desafíos asociados con la gestión a largo plazo de los residuos nucleares.

Marco teórico

El decaimiento radioactivo de un solo isótopo se describe por una ecuación diferencial lineal de primer orden (Krane, 1987):

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \quad (1)$$

Donde $N(t)$ es la cantidad de núcleos radiactivos en el tiempo t , y λ es la constante de decaimiento, característica de cada isótopo y con unidades de tiempo⁻¹.

Demostración.

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= -\lambda N(t) \\ \int \frac{dN}{N} &= \int -\lambda dt \\ \ln |N(t)| &= -\lambda t + C \\ N(t) &= e^C e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

□

Aplicando la condición inicial $N(0) = N_0$, obtenemos $e^C = N_0$, por lo tanto, la ley de decaimiento exponencial es:

La actividad $A(t)$, definida como la tasa de decaimiento, es proporcional a la cantidad de núcleos presentes (Choppin et al., 2013):

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$$

Donde $A_0 = \lambda N_0$ es la actividad inicial.

Modelado de Mezclas de Isótopos Radiactivos

En una mezcla de n isótopos radiactivos, la actividad total $A_{total}(t)$ se obtiene por la suma de las actividades individuales, asumiendo un decaimiento independiente para cada

isótopo (Choppin et al., 2013):

$$A_{total}(t) = \sum_{i=1}^n A_i(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i N_{i,0} e^{-\lambda_i t}$$

Este principio de superposición es fundamental para el modelado de sistemas complejos con múltiples componentes radiactivos.

Introducción a la Transformada de Laplace en el Análisis de Sistemas Lineales

La transformada de Laplace de una función $f(t)$, definida para $t \geq 0$, se denota por $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y se define como (Ojaleydo y bty bobda):

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

Donde $s = \sigma + j\omega$ es una variable compleja. La transformada de Laplace es una herramienta poderosa para analizar sistemas lineales.

Teorema 1 (*Linealidad de la transformada de Laplace*)

Sea $f(t)$ y $g(t)$ funciones tales que existen sus transformadas de Laplace, es decir,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s).$$

Sean a y b constantes. Entonces, se cumple que:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s).$$

Demostración. Por definición de la transformada de Laplace, se tiene:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} [af(t) + bg(t)] dt.$$

Aplicando la linealidad de la integral:

$$= \int_0^\infty ae^{-st} f(t) dt + \int_0^\infty be^{-st} g(t) dt.$$

Sacando las constantes fuera de las integrales:

$$= a \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt + b \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt.$$

Reconociendo las transformadas de Laplace:

$$= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s).$$

□

Teorema 2 (*Transformada de una derivada*)

Sea $f(t)$ una función tal que $f(t)$ y su derivada $f'(t)$ son funciones de clase apropiada (por ejemplo, funciones continuas por partes y de crecimiento exponencial). Entonces, la transformada de Laplace de $f'(t)$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Demostración. Por definición de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt.$$

Aplicamos integración por partes, tomando:

$$u = e^{-st} \quad \Rightarrow \quad du = -se^{-st} dt, \quad dv = f'(t) dt \quad \Rightarrow \quad v = f(t).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt &= [e^{-st} f(t)]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) - e^{-s \cdot 0} f(0) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Como $f(t)$ tiene crecimiento a lo más exponencial y $s > 0$, entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} \\ &= sF(s) - f(0). \end{aligned}$$

□

Aplicación de la Transformada de Laplace al Decaimiento Radioactivo

La transformada de Laplace de la actividad de un solo isótopo $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$ se calcula como (Lathi y Ding, 2009):

$$A(s) = \mathcal{L}\{A_0 e^{-\lambda t}\} = A_0 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-st} dt = A_0 \int_0^{\infty} e^{-(s+\lambda)t} dt$$
$$A(s) = A_0 \left[-\frac{1}{s + \lambda} e^{-(s+\lambda)t} \right]_0^{\infty} = \frac{A_0}{s + \lambda}$$

El polo en $s = -\lambda$ está directamente relacionado con la tasa de decaimiento.

Transformada de Laplace de la Actividad Total de una Mezcla

Aplicando la propiedad de linealidad (Boyce y DiPrima, 2017):

$$A_{total}(s) = \mathcal{L} \left\{ \sum_{i=1}^n A_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}\{A_i(t)\} = \sum_{i=1}^n \frac{A_{i,0}}{s + \lambda_i}$$

La función $A_{total}(s)$ en el dominio s contiene polos en $s = -\lambda_i$ para cada isótopo, codificando el comportamiento temporal de la actividad total.

Metodología

Esta investigación adopta una metodología basada en el análisis teórico y la simulación computacional para explorar el comportamiento de la actividad en mezclas de isótopos radiactivos. El enfoque se centra en la aplicación conceptual de la transformada de Laplace como marco analítico y en la utilización de Python para la implementación y visualización de escenarios teóricos.

Análisis Teórico con la Transformada de Laplace

Se empleará el formalismo de la transformada de Laplace para analizar la respuesta del sistema de decaimiento radiactivo, tanto para isótopos individuales como para mezclas. Esto incluirá:

- La representación matemática de la ley de decaimiento exponencial en el dominio del tiempo.

- La aplicación de la transformada de Laplace a la función de actividad de un solo isótopo para obtener su representación en el dominio complejo s . Se analizará la relación entre la constante de decaimiento (λ) y la ubicación del polo en el plano s .
- La extensión del análisis al caso de mezclas de isótopos, utilizando la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace para obtener la transformada de Laplace de la actividad total como la suma de las transformadas individuales.
- La interpretación teórica de las características de la función de actividad en el dominio s (ubicación de los polos) en relación con el comportamiento temporal de la actividad total.

Si bien el objetivo principal es el análisis teórico, la transformada inversa de Laplace no se aplicará formalmente para obtener soluciones explícitas en el dominio del tiempo, ya que estas son conocidas. En cambio, la transformada de Laplace se utilizará como una herramienta conceptual para comprender la estructura de la respuesta del sistema en términos de sus componentes frecuenciales complejas.

Diseño y Simulación de Escenarios Teóricos en Python

Se diseñarán y simularán diversos escenarios teóricos utilizando el lenguaje de programación Python y las bibliotecas NumPy y Matplotlib. Estos escenarios se definirán variando los siguientes parámetros:

- El número de isótopos presentes en la mezcla.
- Las constantes de decaimiento (λ_i) de cada isótopo, seleccionando valores que representen diferentes escalas de tiempo de decaimiento (vidas medias cortas, intermedias y largas).
- Las cantidades iniciales ($N_{i,0}$) o las actividades iniciales ($A_{i,0}$) relativas de cada isótopo en la mezcla, permitiendo explorar la influencia de la composición inicial.

Para cada escenario teórico, se implementarán funciones en Python para calcular la actividad de cada isótopo en función del tiempo y la actividad total de la mezcla. Se generarán visualizaciones (gráficas de actividad vs. tiempo) utilizando Matplotlib para ilustrar el comportamiento de la actividad total y la contribución relativa de los diferentes isótopos.

Análisis Comparativo y Cualitativo de los Resultados

El análisis de los resultados de las simulaciones se centrará en la interpretación teórica de las curvas de actividad total en relación con los parámetros de los escenarios diseñados

y los principios de la transformada de Laplace. Se realizará un análisis comparativo y cualitativo para identificar:

- La influencia de las constantes de decaimiento de los componentes en la tasa de disminución de la actividad total.
- El impacto de la composición inicial de la mezcla en la forma de la curva de actividad total a corto, mediano y largo plazo.
- Las posibles tendencias o regímenes de comportamiento que emergen en la actividad total en función de las combinaciones de isótopos presentes.
- La conexión conceptual entre las características de los parámetros del sistema (las λ_i) y el comportamiento observado en el dominio del tiempo, interpretada a través de su representación en el dominio de Laplace (ubicación de los polos).

Resultados y Análisis

En esta sección, se presentan y analizan los resultados obtenidos de las simulaciones computacionales diseñadas para explorar teóricamente el comportamiento de la actividad en mezclas de isótopos radiactivos. Los escenarios teóricos se definieron variando el número de isótopos, sus constantes de decaimiento y sus cantidades iniciales relativas.

Escenario 1: Mezcla de Dos Isótopos con Constantes de Decaimiento Diferentes

Se consideró una mezcla de dos isótopos, Isótopo A con una constante de decaimiento relativamente alta ($\lambda_A = 0,5 \text{ año}^{-1}$) y una cantidad inicial normalizada de 1, e Isótopo B con una constante de decaimiento baja ($\lambda_B = 0,05 \text{ año}^{-1}$) y una cantidad inicial normalizada de 1.

La Figura I muestra la actividad de cada isótopo individualmente y la actividad total de la mezcla en función del tiempo. Se observa que la actividad total inicialmente está dominada por el Isótopo A, que decae rápidamente debido a su alta constante de decaimiento. Sin embargo, a medida que el tiempo avanza, la contribución del Isótopo B, con su decaimiento lento, se vuelve predominante en la actividad total. En el dominio de Laplace, la actividad total de este sistema tendría dos polos, ubicados en $s = -0,5$ y $s = -0,05$, correspondientes a las tasas de decaimiento de cada isótopo. La contribución de cada polo al comportamiento temporal está determinada por sus respectivos residuos”, que en este caso están relacionados con las actividades iniciales.

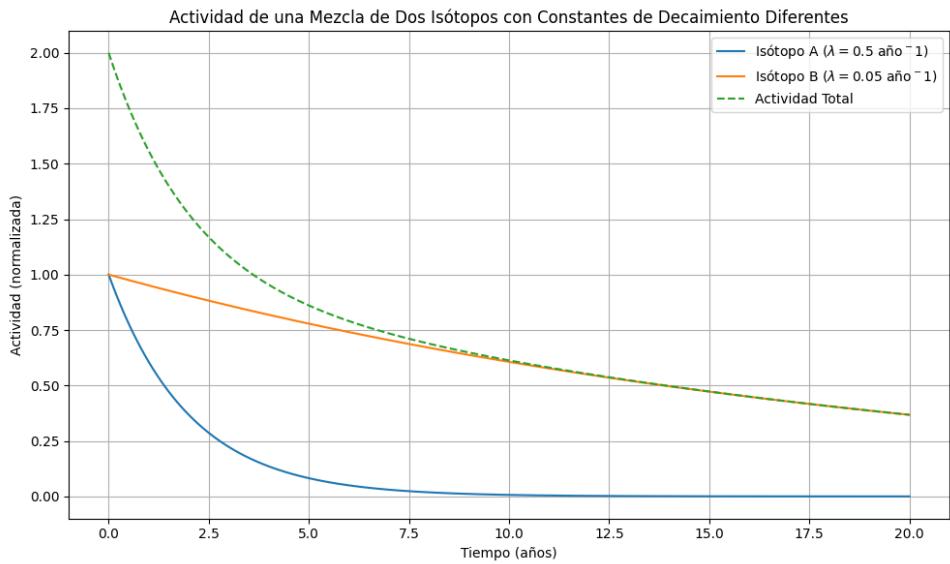


Figura 1: Actividad de una mezcla de dos isótopos con constantes de decaimiento diferentes.

Escenario 2: Mezcla de Tres Isótopos con Cantidad Inicial Igual y Constantes de Decaimiento Variadas

Se simuló una mezcla de tres isótopos con cantidades iniciales normalizadas iguales (1 para cada uno) y constantes de decaimiento $\lambda_1 = 0,2 \text{ año}^{-1}$, $\lambda_2 = 0,08 \text{ año}^{-1}$, y $\lambda_3 = 0,02 \text{ año}^{-1}$.

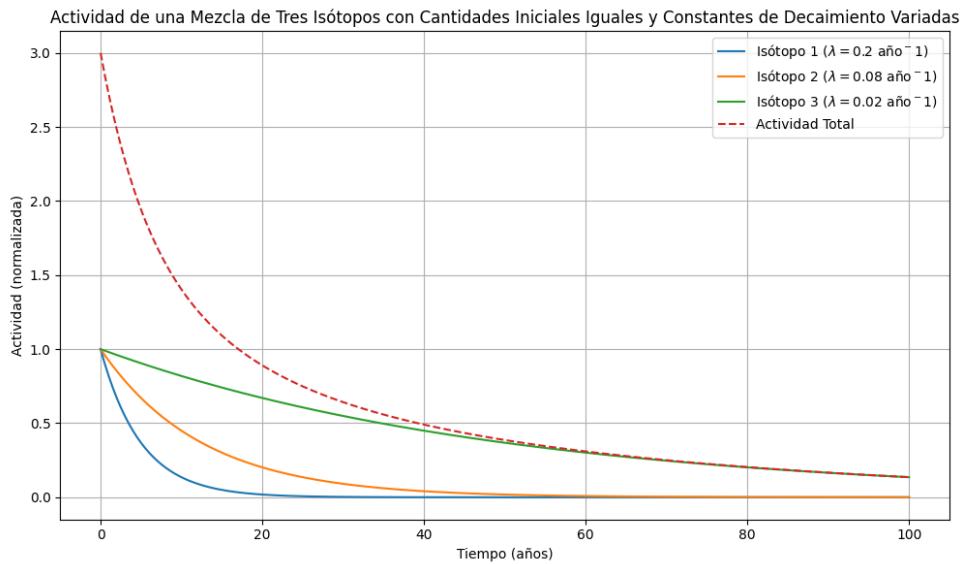


Figura 2: Actividad de una mezcla de tres isótopos con cantidades iniciales iguales y constantes de decaimiento variadas.

La Figura 2 ilustra cómo la actividad total es una combinación de tres decaimientos exponenciales con diferentes tasas. Inicialmente, la actividad total disminuye más rápidamente debido a la contribución del isótopo con la constante de decaimiento más alta

(λ_1) . A medida que este isótopo decae significativamente, la actividad total se ve cada vez más influenciada por los isótopos con constantes de decaimiento más bajas (λ_2 y λ_3), lo que resulta en una disminución más gradual a largo plazo. En el dominio de Laplace, la función de actividad total para este escenario tendría tres polos correspondientes a las tres constantes de decaimiento.

Análisis Teórico de los Resultados

Los resultados de las simulaciones teóricas demuestran cómo la actividad total de una mezcla de isótopos radiactivos está intrínsecamente ligada a las características de decaimiento de sus componentes individuales. La presencia de isótopos con constantes de decaimiento altas conduce a una disminución rápida de la actividad en las etapas iniciales, mientras que los isótopos con constantes de decaimiento bajas determinan el comportamiento a largo plazo.

Desde la perspectiva de la transformada de Laplace, cada isótopo en la mezcla introduce un polo en la función de actividad total en el dominio s . La ubicación de estos polos (en $s = -\lambda_i$) refleja directamente la tasa de decaimiento del isótopo correspondiente en el dominio del tiempo. La contribución de cada polo al comportamiento temporal de la actividad total está ponderada por la amplitud inicial de ese componente (relacionada con la actividad inicial del isótopo).

La complejidad del comportamiento de la actividad total aumenta con el número de isótopos en la mezcla, ya que cada componente añade un término exponencial en el dominio del tiempo y un polo en el dominio de Laplace. El análisis en el dominio s proporciona una forma concisa de representar y comprender la contribución de cada componente a la respuesta global del sistema. La ausencia de términos de interacción entre los isótopos en el modelo (decaimiento independiente) se refleja en la simple suma de las transformadas de Laplace individuales.

Conclusiones

Esta investigación teórica ha explorado el comportamiento de la actividad en mezclas de isótopos radiactivos mediante el análisis conceptual de la transformada de Laplace y la simulación computacional en Python. Los resultados de los escenarios teóricos simulados ilustran claramente cómo la actividad total de una mezcla es una superposición de los decaimientos exponenciales individuales de sus componentes.

El análisis del Escenario 1 demostró la influencia dominante del isótopo con la constante

de decaimiento más alta en las etapas iniciales, seguido por el predominio del isótopo de decaimiento más lento a largo plazo. Desde la perspectiva de la transformada de Laplace, esto se refleja en la presencia de polos en el plano s correspondientes a ambas constantes de decaimiento, cuya contribución al comportamiento temporal está ponderada por las actividades iniciales relativas.

El Escenario 2, con una mezcla de tres isótopos, corroboró que la actividad total exhibe un comportamiento complejo dictado por la combinación de las diferentes tasas de decaimiento. La disminución inicial de la actividad es más rápida debido a los isótopos de vida corta, mientras que la persistencia a largo plazo está determinada por los isótopos con vidas medias más largas. En el dominio de Laplace, esto se manifiesta en la presencia de tres polos, cada uno asociado a la constante de decaimiento de un isótopo componente.

La aplicación conceptual de la transformada de Laplace proporciona un marco valioso para comprender la estructura de la respuesta del sistema de decaimiento de mezclas. Cada isótopo introduce un modo de decaimiento exponencial en el dominio del tiempo, que se corresponde con un polo en el dominio s . La ubicación de estos polos codifica la información sobre la velocidad de decaimiento de cada componente.

Si bien este estudio se ha centrado en un análisis teórico y la simulación de escenarios idealizados, los principios fundamentales aquí explorados son aplicables a la comprensión del comportamiento de la actividad en residuos nucleares reales. La complejidad inherente a la gestión de estos residuos radica en la diversidad de isótopos presentes y sus variadas vidas medias, lo que subraya la necesidad de modelos precisos para la predicción a largo plazo.

Futuras investigaciones podrían extender este análisis teórico considerando:

- La inclusión de cadenas de decaimiento, donde el decaimiento de un isótopo produce otro isótopo radiactivo. Esto implicaría sistemas de ecuaciones diferenciales acopladas y una estructura más compleja en el dominio de Laplace.
- El análisis de la sensibilidad de la actividad total a variaciones en las cantidades iniciales y las constantes de decaimiento.
- La aplicación de técnicas de análisis de sistemas lineales más avanzadas, como el análisis de respuesta en frecuencia, al sistema de decaimiento de mezclas.

Referencias

- Choppin, G. R., Liljenzin, J.-O., Rydberg, J., & Ekberg, C. (2013). *Radiochemistry and Nuclear Chemistry*. Academic Press.
- Krane, K. S. (1987). *Introductory Nuclear Physics*. John Wiley & Sons.
- Oppenheim, A. V., Willsky, A. S., & Nawab, S. H. (1997). *Signals & Systems*. Prentice Hall.
- Lathi, B., & Ding, Z. (2009). *Linear Time-Invariant Systems*. Oxford University Press.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons.