LatArXiv Preprints | Enviado: 06/04/2025 Publicado: 29/04/2025 DOI: 10.62059/LatArXiv.preprints.350

*Preprint*

# Análisis algebraico de soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con raíces complejas

## *Algebraic analysis of oscillatory solutions in second order linear differential equations of with complex roots*

Andrés Felipe, Orduz Pérez

**Pertenencia institucional**

Universidad de los Llanos

**Correspondencia**

andres.orduz@unillanos.edu.co

**ORCID**

0009-0001-1663-517X

**Resumen**

En este trabajo se analiza desde un enfoque algebraico las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, cuando la ecuación característica asociada presenta raíces complejas conjugadas. Se demuestra que tales soluciones pueden representarse como combinaciones lineales de funciones seno y coseno multiplicadas por exponenciales reales. Se establecen propiedades fundamentales del espacio de soluciones, tales como linealidad, independencia y comportamiento analítico. El análisis se realiza exclusivamente desde una perspectiva matemática, sin recurrir a interpretaciones gráficas ni aplicaciones físicas.

**Palabras clave:** Ecuaciones diferenciales; Raíces complejas; Soluciones oscilatorias; Análisis algebraico; Visualización computacional

**Abstract**

This paper analyzes from an algebraic approach the solutions of second order homogeneous linear differential equations with constant coefficients, when the associated characteristic equation presents complex conjugate roots. It is shown that such solutions can be represented as linear combinations of sine and cosine functions multiplied by real exponentials. Fundamental properties of the solution space are established, such as linearity, independence and analytical behavior. The analysis is performed exclusively from a mathematical perspective, without resorting to graphical interpretations or physical applications.

**Key words:** Differential equations; Complex roots; Oscillatory solutions; Algebraic analysis; Computational visualization



Licencia: CC BY

# Análisis algebraico de soluciones oscilatorias en ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con raíces complejas

Andrés Felipe Orduz Pérez[*]

**Resumen**

En este trabajo se analiza desde un enfoque algebraico las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, cuando la ecuación característica asociada presenta raíces complejas conjugadas. Se demuestra que tales soluciones pueden representarse como combinaciones lineales de funciones seno y coseno multiplicadas por exponenciales reales. Se establecen propiedades fundamentales del espacio de soluciones, tales como linealidad, independencia y comportamiento analítico. El análisis se realiza exclusivamente desde una perspectiva matemática, sin recurrir a interpretaciones gráficas ni aplicaciones físicas.
**Palabras clave:** ecuaciones diferenciales, raíces complejas, soluciones oscilatorias, análisis algebraico, visualización computacional.

## 1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes constituyen un pilar en el estudio del análisis matemático. Particularmente, cuando la ecuación característica asociada posee raíces complejas, las soluciones exhiben un comportamiento oscilatorio. Aunque dicho fenómeno es ampliamente reconocido en contextos aplicados —como la física o la ingeniería—, en esta investigación se aborda desde un punto de vista estrictamente algebraico y analítico, con énfasis en la estructura matemática del espacio solución y en la demostración formal de las propiedades de las soluciones.
El propósito de este trabajo es demostrar rigurosamente que, bajo ciertas condiciones, las soluciones de estas ecuaciones diferenciales pueden expresarse como combinaciones de funciones trigonométricas, y que forman un espacio vectorial de dimensión dos. Asimismo, se exploran las condiciones de existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones sin recurrir a herramientas visuales.
El propósito de este trabajo es demostrar rigurosamente que, bajo ciertas condiciones, las soluciones de estas ecuaciones diferenciales pueden expresarse como combinaciones de funciones trigonométricas, y que forman un espacio vectorial de dimensión dos. Asimismo, se exploran las condiciones de existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones sin recurrir a herramientas visuales.

[*]Ingeniería Electrónica, Facultad de Ciencias Básicas e Ingenierías, Universidad de los Llanos.

## 2. Marco teórico

Se considera la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes reales constantes:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. La solución general se obtiene resolviendo la ecuación característica:

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{2}$$

Cuando el discriminante es negativo:

$$\Delta = a^2 - 4b < 0 \tag{3}$$

la ecuación característica tiene raíces complejas conjugadas:

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0 \tag{4}$$

Bajo esta condición, las soluciones fundamentales pueden expresarse como:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \tag{5}$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{6}$$

Las soluciones de estas ecuaciones han sido ampliamente estudiadas (Zill, 2014; Boyce & DiPrima, 2017). Para el caso de raíces complejas, el análisis se apoya en la teoría clásica de ecuaciones diferenciales (Simmons, 1991).

## 3. Metodología

La investigación se desarrolla mediante técnicas del análisis matemático y el álgebra lineal. Se siguen los siguientes pasos:

1. Derivación formal de la solución general a partir de la ecuación característica con raíces complejas.

2. Aplicación de identidades de Euler para demostrar la equivalencia entre representaciones exponenciales y trigonométricas.

3. Verificación de la independencia lineal de las soluciones fundamentales mediante el cálculo del Wronskiano.

4. Análisis de unicidad y existencia de soluciones usando el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias.

5. Discusión del comportamiento asintótico de las soluciones en función del parámetro $\alpha$.

# 4. Resultados y análisis

## 4.1. Derivación de la solución

Dada la ecuación diferencial:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{7}$$

si $\Delta = a^2 - 4b < 0$, se obtiene:

$$r = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y(x) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{8}$$

Aplicando las identidades de Euler:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{9}$$

se concluye que la solución general real es:

$$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \tag{10}$$

## 4.2. Independencia lineal

Sea:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{11}$$

El Wronskiano es:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{2\alpha x}\beta \neq 0 \quad \forall x \tag{12}$$

Esto confirma que $y_1$ y $y_2$ son linealmente independientes, y por lo tanto forman una base del espacio solución.

## 4.3. Existencia y unicidad

Por el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias, dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y condiciones iniciales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, existe una única solución que satisface la ecuación y esas condiciones.

## 4.4. Análisis del comportamiento

- Si $\alpha = 0$: la solución es oscilatoria pura.
- Si $\alpha < 0$: las oscilaciones decrecen exponencialmente.
- Si $\alpha > 0$: las oscilaciones crecen exponencialmente.

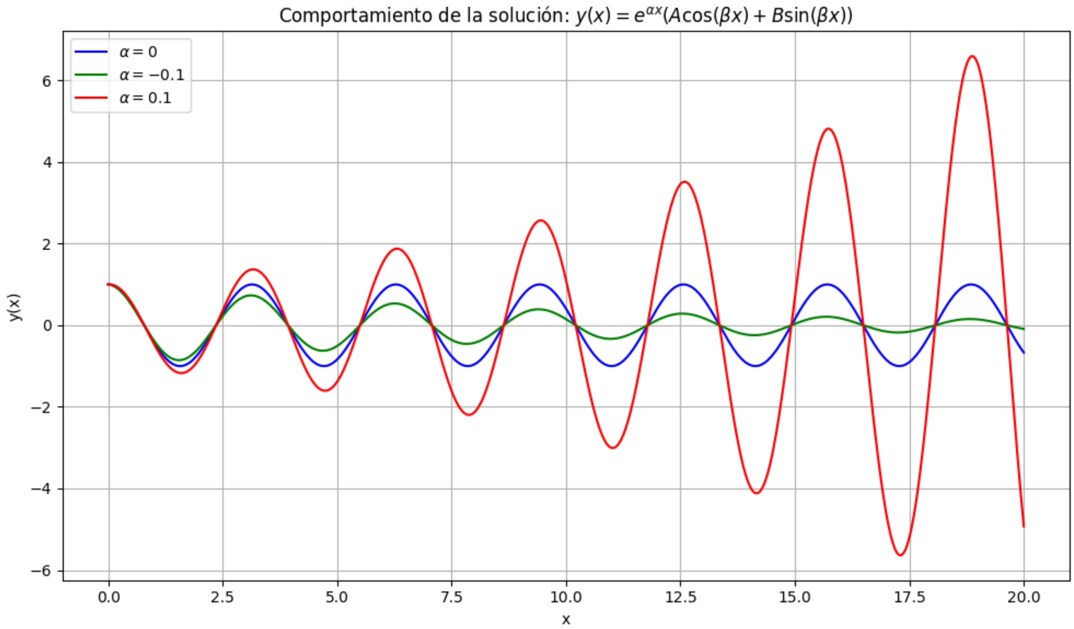


Figura 1: Gráficas de la solución $y(x)$ para distintos valores de $\alpha$.

# 5. Conclusiones

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con raíces complejas en su ecuación característica admiten soluciones que pueden expresarse como combinaciones de funciones trigonométricas multiplicadas por funciones exponenciales. El análisis algebraico permite demostrar rigurosamente la forma de estas soluciones, su independencia lineal y su dependencia del parámetro real $\alpha$, que modula el crecimiento o decrecimiento exponencial. La estructura del espacio solución y el comportamiento asintótico pueden ser comprendidos sin necesidad de apoyos gráficos, únicamente mediante herramientas de álgebra y análisis.

# Referencias

# Referencias

Zill, D. G. (2014). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Cengage Learning.

Simmons, G. F. (1991). *Differential Equations with Applications and Historical Notes*. McGraw-Hill.

# Código Python

Andrés Felipe Orduz Pérez

6 de abril de 2025

## Código Python

A continuación se muestra el codigo de Python utilizado en la investigación:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Dominio
x = np.linspace(0, 20, 1000)

# Parametros
beta = 2             # Frecuencia de oscilacion
A, B = 1, 0           # Coeficientes para la combinacion lineal

# Funcion general
def y(x, alpha):
    return np.exp(alpha * x) * (A * np.cos(beta * x) + B * np.sin(beta * x))

# Valores de alpha a graficar
alphas = [0, -0.1, 0.1]
labels = [r"$\alpha = 0$", r"$\alpha = -0.1$", r"$\alpha = 0.1$"]
colors = [’blue’, ’green’, ’red’]

# Grafica
plt.figure(figsize=(10, 6))
for a, label, color in zip(alphas, labels, colors):
    plt.plot(x, y(x, a), label=label, color=color)

plt.title("Comportamiento de la solucion: $y(x) = e^{\\alpha x}(A \\cos(\\beta x) + B \\sin(\\beta x))$")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y(x)")
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Listing 1: Código Python